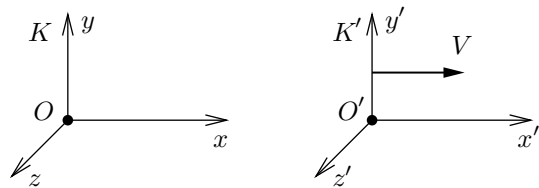


Передмова

Посібник ґрунтується на курсі електродинаміки, який викладався протягом багатьох років студентам фізичного факультету Дніпропетровського національного університету. Видання допоможе студентам у засвоєнні основних понять та законів спеціальної теорії відносності, релятивістської механіки й електродинаміки та формуванні навичок їх застосування до вирішення практичних проблем. Вважається, що студентам відомі необхідні поняття векторної алгебри та теоретичної механіки. Для розуміння матеріалу посібника достатньо відомостей, одержаних у загальному курсі електродинаміки.

1. Перетворення Лоренца

Розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K' . Нехай перша – лабораторна – нерухома, а друга рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{V}$ відносно неї. Вважатимемо осі OX і OX' декартових координат обох систем спрямованими вздовж напрямку швидкості (рисунок).



Дві інерціальні системи відліку,
що рухаються з відносною швидкістю V

Також візьмемо, що в момент, коли початки систем збігаються ($\mathbf{r} = \mathbf{r}' = 0$), годинники показують час $t = t' = 0$. Перетворення Лоренца встановлюють зв'язок між координатами певної події в лабораторній K і рухомій K' системах відліку:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \quad x = \gamma (x' + V t'), \quad y = y', \quad z = z',$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.1)$$

Обернене перетворення від лабораторної системи до рухомої знайдемо заміною $V \rightarrow -V$ і штрихованих координат на нештриховані, оскільки в системі K' лабораторна система K рухається в бік, протилежний швидкості V :

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - V t), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.2)$$

Приклад 1.1. Довжина рухомого стрижня визначається множенням його швидкості V на час τ проходження стрижня повз точку, де знаходиться спостерігач. Знайти виміряну довжину рухомого стрижня, якщо у власній системі відліку його довжина l_0 .

Вимірювання довжини стрижня складається з двох подій: перший кінець стрижня порівнюється зі спостерігачем (подія 1); другий кінець стрижня порівнюється зі спостерігачем (подія 2). Виберемо систему відліку спостерігача K таким чином, щоб він знаходився на початку координат, події 1 відповідав час $t = 0$, а стрижень рухався вздовж осі x . Тоді координати подій у системі відліку K матимуть вигляд:

$$\text{подія 1: } t = 0, \quad x = 0; \quad \text{подія 2: } t = \tau, \quad x = 0.$$

Оберемо власну систему відліку стрижня (K') таким чином, щоб той його кінець, що першим порівнюється зі спостерігачем, знаходився на початку координат, події 1 відповідав час $t' = 0$, вісь x' була спрямована вздовж стрижня, причому її напрямок збігався з напрямком осі x системи відліку K . Тоді координати подій у системі відліку K' будуть мати такий вигляд:

$$\text{подія 1: } t' = 0, \quad x' = 0; \quad \text{подія 2: } t' = \tau', \quad x' = -l_0.$$

Для обраних систем відліку K , K' координати будь-якої події зв'язані перетвореннями Лоренца (1.2):

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - V t), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Координати події 1 задовольняють перетворення Лоренца тотожно. Підставимо до перетворень Лоренца координати події 2:

$$\tau' = \gamma \tau, \quad -l_0 = -\gamma V \tau.$$

Оскільки $V \tau$ є виміряна довжина стрижня l ,

$$l_0 = \gamma l, \quad l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Таким чином, у процесі вимірювання довжини рухомого стрижня спостерігається лоренцеве скорочення.

Приклад 1.2. У деякій системі відліку K в одній точці простору відбуваються дві події, між якими проходить час τ_0 . Визначити час між цими подіями в системі відліку спостерігача, який рухається зі швидкістю V .

Оберемо систему координат K таким чином, щоб події відбувалися на початку координат, а спостерігач рухався вздовж осі x . Нехай події 1 відповідає час $t = 0$. Тоді координати подій у системі відліку K будуть мати вигляд:

$$\text{подія 1: } t = 0, \quad x = 0; \quad \text{подія 2: } t = \tau_0, \quad x = 0.$$

Оберемо систему відліку спостерігача K' таким чином, щоб початок координат знаходився в точці, де відбувається подія 1, причому події 1 відповідає час $t' = 0$, а вісь x' спрямована вздовж осі x системи відліку K . Тоді координати подій у системі відліку спостерігача K' матимуть вигляд:

$$\text{подія 1: } t' = 0, \quad x' = 0; \quad \text{подія 2: } t' = \tau', \quad x' = x'_2,$$

де τ' – час між подіями в цій системі відліку. Координати будь-якої події в системах K , K' зв'язані перетвореннями (1.2):

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - V t), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Координати події 1 задовольняють перетворення Лоренца тотожно. Підставимо до цих перетворень координати події 2:

$$\tau' = \gamma \tau, \quad x'_2 = -\gamma V \tau.$$

Звідси знайдемо

$$\tau' = \tau / \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Таким чином, для рухомого спостерігача між подіями проходить більше часу, ніж у системі відліку, де події відбуваються в одній точці простору.

Приклад 1.3. Нерухоме джерело світла випромінює сигнали з періодом τ_0 . Із яким періодом τ надходять сигнали до спостерігача, що рухається в напрямку джерела зі швидкістю V (ефект Доплера)?

Для визначення інтервалів часу між випромінюванням та прийомом сигналів розглянемо чотири події: випромінювання першого сигналу (подія 1); випромінювання другого сигналу (подія 2); прийом першого сигналу (подія 3); прийом другого сигналу (подія 4).

Оберемо власну систему відліку джерела K таким чином, щоб джерело знаходилося на початку координат, а спостерігач рухався вздовж осі x . Нехай події 1 відповідає час $t = 0$. Тоді координати подій у системі відліку K матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \text{подія 1: } t = 0, \quad x = 0; \quad \text{подія 2: } t = \tau_0, \quad x = 0; \\ \text{подія 3: } t = t_3, \quad x = x_3; \quad \text{подія 4: } t = t_4, \quad x = x_4. \end{aligned}$$

Оскільки спостерігач рухається до джерела вздовж напрямку осі x , координати $x_3 < 0$ та $x_4 < 0$. Координата x_3 описує положення в момент часу t_3 того світлового сигналу, що вийшов із початку координат у момент часу $t = 0$ та рухався проти осі x зі швидкістю c . Тому $x_3 = -ct_3$. Аналогічно одержуємо $x_4 = -c(t_4 - \tau_0)$. Події 3 та 4 відповідають спостерігачу, який рухається в напрямку осі x зі швидкістю V . Тому $x_4 - x_3 = V(t_4 - t_3)$. Виражаючи x_3 , x_4 та t_4 через t_3 , знаходимо таке:

$$\begin{aligned} \text{подія 3: } t = t_3, \quad x = -ct_3; \\ \text{подія 4: } t = t_3 + \frac{\tau_0}{1 + V/c}, \quad x = -ct_3 + \frac{V \tau_0}{1 + V/c}. \end{aligned}$$

Виберемо систему відліку спостерігача K' таким чином, щоб вона рухалася відносно системи K вздовж напрямку осі x , а початки координат обох систем збігались у початкові моменти часу. Тоді координати будь-якої події в системах K і K' будуть зв'язані перетвореннями Лоренца (1.2):

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - V t), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Оскільки нас цікавить час між подіями 3 та 4, обчислимо за допомогою перетворень Лоренца моменти часу, коли відбуваються ці події:

$$\text{подія 3: } t' = \gamma t_3 \left(1 + \frac{V}{c} \right);$$

$$\text{подія 4: } t' = \gamma t_3 \left(1 + \frac{V}{c} \right) + \gamma \frac{\tau_0}{1 + V/c} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right).$$

Звідси визначаємо інтервал часу, із яким будуть надходити сигнали до спостерігача:

$$\tau = \gamma \tau_0 \left(1 - \frac{V}{c} \right) = \tau_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}.$$

Це є відома формула ефекту Доплера.

Задачі для самостійної роботи

1. Нерухоме джерело світла випромінює сигнали з інтервалом часу τ_0 . Із яким інтервалом часу τ будуть надходити сигнали до спостерігача, що рухається в напрямку від джерела зі швидкістю V (ефект Доплера)?

2. У системі відліку K два нерухомих стрижні утворюють кут θ . Система відліку K' рухається вздовж одного зі стрижнів із великою швидкістю V . Який кут між стрижнями спостерігається в системі відліку K' ?

3. Два стрижні з власною довжиною l_0 рухаються назустріч один одному в лабораторії зі швидкістю v кожен. Чому

дорівнюють довжина й швидкість одного масштабу відносно іншого?

4. Два стрижні з власною довжиною l_0 рухаються зі швидкостями v_1 вздовж осі OX і v_2 вздовж осі OY відповідно. Знайти довжину рухомих стрижнів відносно систем відліку кожного з них.

5. Записати перетворення координат і часу, яке можна подати як результат двох послідовних перетворень Лоренца: а) рух системи відліку вздовж осі OX зі швидкістю V_x ; б) рух системи відліку вздовж осі OY зі швидкістю V_y .

6. Навести перетворення координат і часу, що його можна подати як результат двох послідовних перетворень Лоренца: а) рух системи відліку вздовж осі OX зі швидкістю V_x ; б) обертання системи відліку навколо осі OZ на кут α .

7. Записати перетворення координат і часу, яке можна подати як результат двох послідовних перетворень Лоренца: а) рух системи відліку вздовж осі OY зі швидкістю V ; б) обертання системи відліку навколо осі OX на кут α .

2. Чотиривимірні вектори

Чотиривимірним вектором (чотиривектором) називається фізична величина, задана в кожній системі відліку набором своїх координат $a^\mu = (a_0, a^1, a^2, a^3)$, які в разі переходу від однієї системи до іншої перетворюються як компоненти радіуса-вектора $x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$. Наприклад, у випадку перетворень Лоренца (1.2) від системи K до K'

$$\begin{aligned} (a')^0 &= a^0 \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{V}{c} \frac{x^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ (a')^1 &= a^1 \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{V}{c} \frac{a^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ (a')^2 &= a^2, \quad (a')^3 = a^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Те саме стосується тривимірних обертань. Записані компоненти називаються контраваріантними, ми ототожнюємо їх із фізи-

чними компонентами. Інваріантним квадратом чотиривимірною вектора є

$$(a')^2 = a^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2. \quad (2.2)$$

Поряд із контраваріантними («верхніми») компонентами чотиривимірною вектора введемо коваріантні («нижні») компоненти a_μ , зв'язані з фізичними компонентами співвідношеннями $a_0 = a^0$, $a_1 = -a^1$, $a_2 = -a^2$, $a_3 = -a^3$. Доцільність їх уведення полягає в збереженні правила Ейнштейна про підсумовування за повторюваним індексом. Вважається, що підсумовування за індексом у чотиривимірній геометрії завжди здійснюється за верхнім і нижнім індексами, коли вони повторюються:

$$a^2 = \sum_{\mu} a_{\mu} a^{\mu} = a_{\mu} a^{\mu} = a^{\mu} a_{\mu}. \quad (2.3)$$

Порядок індексів підсумовування неістотний. Зокрема, у цих позначеннях квадрат інтервалу набуває вигляду

$$s^2 = x_{\mu} x^{\mu} = x^{\mu} x_{\mu}, \quad (2.4)$$

а інваріантний скалярний добуток чотиривимірних векторів A^{μ} і B^{μ} записується як

$$AB = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu}. \quad (2.5)$$

Перелічуючи компоненти чотиривимірних векторів, будемо застосовувати скорочені позначення $a^{\mu} = (a^0, a^i) = (a^0, \mathbf{a})$, виділяючи нульову й просторові компоненти.

Для запису зв'язку між верхніми та нижніми компонентами вводиться метричний тензор, який у кожній системі координат має однаковий вигляд:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Згортка двох метричних тензорів $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}$, як це видно з формул (2.6), дає чотиривимірний одиничний тензор

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Піднімання й опускання індексів векторів здійснюються за допомогою метричного тензора:

$$a^{\mu} = g^{\mu\nu} a_{\nu}, \quad a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu}. \quad (2.8)$$

Згортка з δ -символом, як і випадку тривимірною простору, переназиває індекс:

$$\delta_{\nu}^{\mu} a^{\nu} = a^{\mu}, \quad \delta_{\mu}^{\nu} a_{\nu} = a_{\mu}. \quad (2.9)$$

Відповідно скалярний добуток двох чотиривимірних векторів a^{μ}, b^{μ} може бути записаний одним з еквівалентних способів:

$$ab = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = g^{\mu\nu} a_{\mu} b_{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} a^{\mu} b_{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} a_{\mu} b^{\nu}. \quad (2.10)$$

Зокрема, за допомогою даного правила квадрат елемента інтервалу записується так:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (d\mathbf{r})^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}, \quad (2.11)$$

що є основною квадратичною формою релятивістської теорії.

Контраваріантні компоненти вектора a^{μ} можна записати як вектор-стовпець. Перетворення Лоренца (2.1) можна тоді записати в матричному вигляді: $a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}$, уводячи матрицю перетворень Λ^{μ}_{ν} з одним верхнім і одним нижнім індексами й застосовуючи стандартне правило множення матриць (рядок $\times$ стовпець).

Чотиривимірним тензором другого рангу називається фізична величина, задана в кожній системі відліку своїми 16 компонентами, які в разі переходу між системами відліку перетворюються як добуток компонент чотиривимірних векторів:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\lambda} \Lambda^{\nu}_{\rho} T^{\lambda\rho}. \quad (2.12)$$

Одночасно з контраваріантними компонентами $T^{\mu\nu}$, які ми отожднюємо з фізичними, можна побудувати коваріантні компоненти $T_{\mu\nu}$ і мішані T_μ^ν . Кожний індекс тензора перетворюється як компоненти вектора. Таким чином, найпростіший тензор – прямий добуток компонент двох векторів. Аналогічно визначається контраваріантний тензор будь-якого рангу:

$$T'^{\mu\nu\lambda\dots} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\lambda_{\lambda'} \dots T^{\mu'\nu'\lambda'\dots}, \quad (2.13)$$

а також тензори довільного типу.

Як і в тривимірному просторі, у часі-просторі можна ввести повністю антисиметричний тензор четвертого рангу $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$. Його компоненти однакові в усіх системах координат. За визначенням $\epsilon^{0123} = 1$, звідки решту ненульових контраваріантних компонент одержують, переставляючи сусідні індекси й змінюючи знак на протилежний. Коваріантні компоненти одержують за допомогою опускання індексів відповідно до стандартного правила (2.8), наприклад $\epsilon_{0123} = -1$.

Приклад 2.1. Знайти загальні властивості матриць переходу між інерціальними системами відліку, використовуючи інваріантність інтервалу.

Інваріантність інтервалу означає $g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g^{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu$. Оскільки $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, для будь-яких подій має виконуватися тотожність

$$g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta dx_\alpha dx_\beta.$$

Звідси, замінивши в лівій частині $\mu \rightarrow \alpha$, $\nu \rightarrow \beta$, одержимо

$$g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta.$$

Останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\Lambda_{\mu\alpha} \Lambda^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta,$$

або, зважаючи на комутативність матриці з оберненою матрицею, у вигляді

$$\Lambda_{\alpha\mu} \Lambda^{\beta\mu} = \delta_\alpha^\beta.$$

Приклад 2.2. Показати, що метричний тензор має однаковий вигляд у всіх інерціальних системах координат.

Застосуємо закон перетворення компонент тензора для $g^{\mu\nu}$:

$$(g')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^{\nu\alpha} = g^{\mu\beta} \Lambda_{\beta\alpha} \Lambda^{\nu\alpha}.$$

Використовуючи результат задачі 2.1, маємо

$$(g')^{\mu\nu} = g^{\mu\beta} \delta_\beta^\nu = g^{\mu\nu}.$$

Отже, у разі переходу до іншої інерціальної системи відліку метричний тензор не змінюється.

Приклад 2.3. Показати, що компоненти $\partial/\partial x^\mu$ утворюють коваріантний чотиривимірний вектор.

Розглянемо довільну скалярну функцію чотиривимірних координат $\phi(x) = \phi'(x')$. Її диференціал є теж скаляр і дорівнює

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

Оскільки dx^μ є контраваріантний вектор, а $d\phi$ є інваріант, то з властивостей перетворень Лоренца випливає, що компоненти $\partial/\partial x^\mu$ повинні перетворюватися як компоненти коваріантного вектора

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \nabla_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

де ∇ позначає звичайний тривимірний градієнт. Тоді похідні за коваріантними компонентами $\partial/\partial x_\mu$ перетворюються як компоненти контраваріантного вектора

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \nabla^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right).$$

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що оператор д'Аламбера є релятивістськи інваріантний.

2. Довести, що властивість поперечності електромагнітних хвиль не залежить від системи відліку.

3. Довести прямим обчисленням, що калібрувальна умова Лоренца для потенціалів електромагнітного поля є релятивістськи інваріантна.

4. Довести прямим обчисленням, що рівняння неперервності є релятивістськи інваріантне співвідношення.

5. Довести релятивістську інваріантність скалярного добутку двох чотиривимірних векторів.

3. Релятивістська кінематика

Чотиривимірні вектори й тензори дозволяють дати визначення динамічних змінних у релятивістській теорії і встановити зв'язок між відповідними тривимірними змінними, які вводяться за допомогою вимірювань у фіксованих системах відліку. У теорії відносності єдиним інваріантним параметром, що відповідає часу, є власний час досліджуваної частинки. Його диференціал між двома послідовними подіями в ході еволюції частинки дорівнює

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}}, \quad (3.1)$$

де ds – відповідний диференціал інтервалу. У власній системі швидкість частинки дорівнює нулю й проміжок власного часу збігається з проміжком часу в системі, миттєво супутній до частинки. Проміжок власного часу $d\tau$, обчислений за формулою (3.1), є інваріантний (однаковий) для будь-яких інерціальних систем відліку, тоді як проміжок часу dt різний.

Чотиривимірна швидкість визначається як

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.2)$$

Оскільки власний час – інваріант, а x^μ – вектор, то u^μ – також вектор. Чотиривимірним прискоренням називається вектор

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (3.3)$$

Явний вираз компонент векторів u^μ, w^μ залежить від вибору системи координат. Наприклад, підставляючи в рівняння (3.2) компоненти $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, знаходимо компоненти чотиривимірної швидкості:

$$u^\mu = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (3.4)$$

Відзначимо основні властивості чотиривимірної швидкості. Її чотиривимірний квадрат

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = c^2. \quad (3.5)$$

Таким чином, не всі компоненти швидкості незалежні, одна з них може бути виражена через три інших. Обчислюючи похідну за параметром власного часу від цього співвідношення, одержимо

$$\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = 0, \quad (3.6)$$

що є умовою ортогональності чотиривимірних векторів швидкості й прискорення.

Приклад 3.1. Знайти закон перетворення швидкості в релятивістській теорії.

Застосовуючи загальні правила перетворень чотиривимірних векторів (2.1), запишемо закон перетворення компонент чотиривимірної швидкості:

$$u'^0 = \frac{u^0 - (V/c)u^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad u'^1 = \frac{u^1 - (V/c)u^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad u'^2 = u^2, \quad u'^3 = u^3.$$

де V – швидкість системи K' відносно системи K (див. рисунок). Компоненти чотиривимірної швидкості (3.4) визначаються швидкостями частинки в системах K і K' відповідно.

Із формули (3.4) знаходимо, що швидкість частинки в будь-якій системі відліку може бути обчислена як

$$v_i = c \frac{u^i}{u^0}.$$

Звідси одержуємо швидкість у системі відліку K' :

$$v'_x = c \frac{u'^1}{u'^0} = c \frac{u^1 - (V/c)u^0}{u^0 - (V/c)u^1} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2},$$

$$v'_y = c \frac{u'^2}{u'^0} = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = c \frac{u'^3}{u'^0} = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}.$$

Ця задача демонструє загальну процедуру використання чотиривимірних величин для знаходження законів перетворення зв'язаних із ними звичайних тривимірних величин.

Приклад 3.2. Обчислити компоненти чотиривимірного прискорення. Знайти закон перетворення тривимірного прискорення.

Для обчислення компонент чотиривимірного прискорення $w^\mu = (w^0, w^i)$ підставимо компоненти (3.4) у визначення (3.3). Після нескладних обчислень одержимо

$$w^\mu = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{c(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{c^2(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^2} \right),$$

де $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – тривимірне прискорення. Ми також використали співвідношення $d(\mathbf{v}^2/c^2)/dt = 2/c^2(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt)$. Як бачимо, у власній системі $\mathbf{v} = 0$ і чотиривимірне прискорення збігається з тривимірним прискоренням $\mathbf{a}$. У загальному випадку просторові компоненти чотиривимірного прискорення не колінеарні вектору $\mathbf{a}$. Тривимірне прискорення $\mathbf{a}$ можна знайти через відомі компоненти w^μ як

$$a^i = (1 - \mathbf{v}^2/c^2) \left(w^i - \frac{v^i w^0}{c} \right).$$

Для обчислення компонент тривимірного прискорення в рухомій системі K'

$$a'^i = \left(1 - \mathbf{v}'^2/c^2 \right) \left(w'^i - \frac{v'^i w'^0}{c} \right)$$

необхідно застосувати до w^μ перетворення Лоренца (2.1) та знайти w'^μ через швидкість та прискорення в нерухомій системі. При цьому також треба застосувати закон перетворення швидкості з задачі 3.1. Остаточний результат пропонується отримати самостійно.

Приклад 3.3. У лабораторній системі відліку знаходиться нерухоме джерело, яке випромінює фотони рівномірно в усіх напрямках. Знайдіть кутовий розподіл потоку фотонів у рухомій системі відліку.

Кутовий розподіл потоку частинок ρ є відношенням кількості частинок, що вилітають за одиницю часу в малий тілесний кут, до цього тілесного кута.

Позначимо лабораторну систему K , а рухому – K' . Спрямуємо осі z та z' уздовж напрямку руху K' . Напрямок у просторі задамо двома кутами сферичної системи координат – θ , φ .

Нехай за проміжок часу τ джерело випромінює N фотонів. Оскільки повний тілесний кут є 4π , в елемент тілесного кута $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, розташованого в напрямку θ , φ , потраплять $dN = N d\Omega/(4\pi)$ фотонів. Відповідний кутовий розподіл має вигляд

$$\rho = \frac{dN}{\tau d\Omega} = \frac{N}{4\pi\tau}.$$

Швидкість фотонів у розглянутому тілесному куті є

$$\mathbf{v} = (c \sin\theta \cos\varphi, \quad c \sin\theta \sin\varphi, \quad c \cos\theta).$$

У системі K' розглянуті фотони випромінюються за час $\tau' = \tau/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ і рухаються в напрямку θ' , φ' зі швидкістю

$$\mathbf{v}' = (c \sin\theta' \cos\varphi', \quad c \sin\theta' \sin\varphi', \quad c \cos\theta'),$$

де явно врахована незмінність величини швидкості світла в усіх інерціальних системах відліку. Таким чином,

$$\cos \theta' = v'_z/c, \quad \operatorname{tg} \varphi' = v'_y/v'_x.$$

Водночас $\mathbf{v}'$ зв'язана з $\mathbf{v}$ перетвореннями із задачі 3.1, у яких треба замінити $x \rightarrow z, z \rightarrow x$:

$$v'_z = \frac{v_z - V}{1 - v_z V/c^2} = \frac{c \cos \theta - V}{1 - \cos \theta V/c},$$

$$v'_{x,y} = \frac{v_{x,y} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_z V/c^2} = \frac{c \sin \theta \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \cos \theta V/c} (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Звідси знаходимо, що в системі K' фотони рухаються в напрямку

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - \cos \theta V/c}, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi$$

в елементі тілесного кута

$$d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} d\Omega = \frac{1 - V^2/c^2}{(1 - \cos \theta V/c)^2} d\Omega.$$

Відповідний кутовий розподіл фотонів

$$\rho' = \frac{dN}{\tau' d\Omega'} = \frac{N(1 - \cos \theta V/c)^2}{4\pi\tau\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\rho(1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 + \cos \theta' V/c)^2},$$

де ми виразили $\cos \theta$ через $\cos \theta'$. Як видно, в рухомій системі відліку кутовий розподіл є неоднорідний. Оскільки в системі K' світлове джерело рухається в напрямку $\theta' = \pi$, то потік фотонів буде найбільш щільним у напрямку руху джерела та найменш щільним у протилежному до руху джерела напрямку.

Задачі для самостійної роботи

1. Два тіла рухаються зі швидкостями v_1 і $v_2 = v_1/2$ під кутом α одне до одного в лабораторній системі відліку. Знайти

швидкість другого тіла відносно системи відліку, зв'язаної з першим тілом.

2. Два тіла рухаються в лабораторній системі відліку зі швидкостями v_1 і $v_2 = v_1/2$ під кутом $\pi/2$. Чому дорівнюють швидкості цих тіл у системі K' , яка рухається вздовж напрямку v_1 зі швидкістю $v_3 = 2v_1$?

3. Нерухоме джерело випромінює за одиницю часу N частинок зі швидкістю u , кутовий розподіл яких у просторі є ізотропний. Знайти кутовий розподіл потоку частинок у системі відліку, в якій джерело рухається зі швидкістю V .

4. У деякій системі відліку в оточуючому просторі ізотропно розподілені джерела світла. Як будуть розподілені ці джерела для спостерігача, який рухається в цій системі з релятивістською швидкістю V ?

4. Релятивістська динаміка

Чотиривимірний імпульс частинки визначається як добуток чотиривимірної швидкості й маси спокою: $p^\mu = m u^\mu$. Маса спокою m є релятивістський інваріант, тому p^μ є чотиривимірний вектор. Компоненти p^μ знаходяться за допомогою компонент чотиривимірної швидкості (3.4):

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = \left(\frac{m c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (4.1)$$

Компоненти p^μ зв'язані співвідношенням

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (4.2)$$

Вектор $\mathbf{p}$ називають тривимірним імпульсом. Нульова компонента чотиривимірного імпульсу є енергією тіла, поділеною на c , $p^0 = \mathcal{E}/c$. Те, що енергія $\mathcal{E}$ і імпульс $\mathbf{p}$ складають компоненти чотиривимірного вектора, дозволяє знайти їх закони перетворення в разі переходу (2.1) від однієї системи координат до іншої:

$$\frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma \left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \frac{V}{c} p_x \right), \quad p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{V}{c} \frac{\mathcal{E}}{c} \right), \quad p'_{y,z} = p_{y,z}.$$

Рівняння руху релятивістської механіки записується у вигляді

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu, \quad (4.3)$$

який безпосередньо узагальнює другий закон Ньютона. Оскільки τ є релятивістський інваріант, F^μ є чотиривимірний вектор (чотиривимірна сила). Зв'язок між тривимірними імпульсом і силою в будь-якій системі відліку виражається таким чином:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (4.4)$$

Компоненти чотиривимірної сили дорівнюють

$$F^\mu = (F^0, \mathbf{F}) = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (4.5)$$

Як тривимірна сила $\mathbf{f}$ можуть розглядатися, наприклад, сила Лоренца $\mathbf{f} = q\mathbf{E} + (q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{H}$ або сили неелектромагнітного походження. Векторний характер F^μ дозволяє знайти компоненти тривимірної сили в будь-якій системі відліку, якщо вони відомі в одній із них.

Приклад 4.1. Знайти закон перетворення сили.

Розглянемо дві системи відліку K і K' , зв'язані перетвореннями Лоренца (2.1). У кожній системі сила визначається просторовими компонентами чотиривимірної сили (4.5):

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}, \quad \mathbf{f}' = \mathbf{F}' \sqrt{1 - \mathbf{v}'^2/c^2},$$

де $\mathbf{v}$ і $\mathbf{v}'$ – швидкості частинки в K і K' відповідно.

Компоненти чотиривимірної сили в K' знаходимо за допомогою перетворень (2.1):

$$(F')^0 = \gamma \left(F^0 - \frac{V}{c} F^1 \right), \quad (F')^1 = \gamma \left(F^1 - \frac{V}{c} F^0 \right), \quad F'^{2,3} = F^{2,3}.$$

Звідси одержуємо силу

$$\mathbf{f}' = \sqrt{1 - \mathbf{v}'^2/c^2} \left(\frac{F^1 - F^0 V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, F^2, F^3 \right).$$

Підставляючи в явному вигляді компоненти чотиривимірної сили (4.5), знаходимо

$$\mathbf{f}' = \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}'^2/c^2}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left(\frac{f_x - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, f_y, f_z \right).$$

Приклад 4.2. Тіло рухається зі швидкістю V через газ, в одиниці об'єму якого міститься n повільних частинок масою m . Визначити тиск P газу на тіло, якщо частинки пружно відбиваються від поверхні тіла.

Позначимо через K' власну систему відліку газу, а через K – власну систему відліку тіла. Спрямуємо осі x та x' уздовж напрямку руху K' . Тоді ці системи відліку будуть зв'язані перетвореннями Лоренца (2.1).

Розглянемо в системі газу інтервал часу τ' . За цей час тіло пройде крізь газ відстань $V\tau'$, а елемент його поверхні S' , спрямований перпендикулярно до напрямку руху, зіткнеться з N частинками:

$$N = nSV\tau',$$

де враховано, що $S = S'$ завдяки незмінності координат y, z .

Розглянемо ті самі зіткнення в системі K . Вони відбуваються за інтервал часу τ в одній точці простору. Враховуючи результат задачі 1.2, знаходимо $\tau' = \tau/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Оскільки частинки газу вважаються повільними ($\mathbf{v}' \simeq 0$), кожна з них налітає на тіло зі швидкістю $v_x \simeq V$, $v_y \simeq 0$, $v_z \simeq 0$ та несе імпульс

$$p_x \simeq \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_y \simeq 0, \quad p_z \simeq 0.$$

У процесі пружного відбиття проекція імпульсу p_x змінює знак, отже, від кожної частинки тіло одержує імпульс $2p_x$. Таким чином, протягом часу τ елемент поверхні тіла S одержує імпульс

$$\Delta p_x = 2 \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{nSV\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Це означає, що на цей елемент діє сила

$$f_x = \frac{\Delta p_x}{\tau} = \frac{2mV^2 nS}{1 - V^2/c^2},$$

що створює тиск

$$P = \frac{|f_x|}{S} = \frac{2mV^2 n}{1 - V^2/c^2}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Нерухоме джерело випромінює світло з частотою ω_0 рівномірно в усіх напрямках. Знайти частоту світла залежно від напрямку в просторі в системі відліку, яка рухається зі швидкістю V відносно джерела. Визначити кутовий розподіл інтенсивності світла в рухомій системі відліку (енергія, що переноситься світлом за одиницю часу в малому тілесному куті, віднесена до цього тілесного кута). Енергія фотона зв'язана з частотою формулою Ейнштейна $\mathcal{E} = \hbar\omega$, маса спокою фотона $m = 0$.

2. Частинка масою m обертається зі швидкістю v на орбіті радіуса R . Знайти силу, що діє на частинку у власній системі відліку.

3. Визначити силу, що діє на заряд q , який рухається в системі K зі швидкістю v вздовж осі OX , якщо в системі, де заряд нерухомий, він знаходиться в постійному електричному полі $E_x = E_0 = \text{const}$.

4. Частинка з зарядом q рухається в лабораторії зі швидкістю $\mathbf{v}$ у магнітному полі $\mathbf{H} = \text{const}$ перпендикулярно до ліній

поля. Знайти силу, що діє на частинку у власній системі відліку.

5. Частинка з зарядом q рухається в лабораторії зі швидкістю $\mathbf{v}$ у магнітному полі $\mathbf{H} = \text{const}$ під кутом α до ліній поля. Знайти силу, що діє на частинку у власній системі відліку.

5. Зіткнення релятивістських частинок

Для замкнених систем унаслідок однорідності часу-простору й ізотропії простору зберігаються енергія, імпульс та момент імпульсу. Ці величини є адитивні, тобто енергія, імпульс та момент імпульсу системи дорівнюють сумі відповідних внесків від окремих частинок.

Процеси розпаду та розсіювання частинок регулюються законами збереження енергії й імпульсу для замкнених систем. У релятивістській теорії енергія та імпульс утворюють компоненти чотиривимірного вектора $p^\mu = (p^0 = \mathcal{E}/c, \mathbf{p})$ для кожної частинки, тому закон збереження енергії-імпульсу для процесів розсіювання запишемо у вигляді

$$\sum_a p_a^\mu = \sum_{a'} p_{a'}'^\mu,$$

де p_a^μ – чотиривимірний імпульс частинки з номером « a » до зіткнення і зі штрихованими індексами – після зіткнення. Кількість частинок може змінюватися в процесі реакції.

Приклад 5.1. У лабораторії початкова частинка з масою m та імпульсом p розпадається на дві частинки. Перша має масу m_1 , імпульс p_1 і вилітає під кутом θ_1 до напрямку руху початкової частинки. Знайти масу m_2 другої частинки.

Із закону збереження енергії-імпульсу знайдемо чотиривимірний імпульс другої частинки: $p_2^\mu = p^\mu - p_1^\mu$. Оскільки маса, енергія та імпульс частинки зв'язані співвідношенням (4.2), формула для визначення маси другої частинки матиме вигляд

$$m_2^2 c^2 = p_2^\mu p_{2\mu} = p^\mu p_\mu + p_1^\mu p_{1\mu} - 2p_1^\mu p_\mu = (m^2 + m_1^2)c^2 - 2p_1^\mu p_\mu.$$

Скалярний добуток $p_1^\mu p_\mu$ у правій частині обчислимо в лабораторній системі відліку:

$$p_1^\mu p_\mu = \frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1 = \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^2} - p p_1 \cos \theta_1.$$

Приклад 5.2. Довести, що випромінювання фотона вільним електроном у вакуумі неможливе відповідно до закону збереження енергії-імпульсу.

Нехай індекси «0», «1» і «2» позначають випромінений фотон, початковий електрон та кінцевий електрон відповідно. Оскільки вільний електрон до та після випромінювання фотона має сталі імпульс та енергію, запишемо закон збереження енергії-імпульсу $p_1^\mu = p_2^\mu + p_0^\mu$ і знайдемо з нього чотиривимірний імпульс фотона: $p_0^\mu = p_2^\mu - p_1^\mu$.

Фотон має нульову масу спокою, тому згідно з формулою (4.2)

$$p_0^\mu p_{0\mu} = p_1^\mu p_{1\mu} + p_2^\mu p_{2\mu} - 2p_1^\mu p_{2\mu} = 2m^2 c^2 - 2p_1^\mu p_{2\mu} = 0,$$

де m – маса електрона. Таким чином, закон збереження енергії-імпульсу вимагає, щоб $p_1^\mu p_{2\mu} = m^2 c^2$. Скалярний добуток $p_1^\mu p_{2\mu}$ обчислимо, наприклад, у власній системі відліку початкового електрона. У цій системі $\mathbf{p}_1 = 0$, $\mathcal{E}_1 = mc^2$. Звідси одержимо

$$p_1^\mu p_{2\mu} = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} = mc \sqrt{p_2^2 + m^2 c^2} \geq m^2 c^2.$$

Як видно, закон збереження енергії-імпульсу виконується лише за умови $p_2=0$. Отже, після випромінювання фотона імпульс електрона залишиться незмінним ($\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 = 0$). Оскільки при цьому фотон матиме нульові імпульс та енергію, то він не існує. Таким чином, випромінювання фотона вільним електроном у вакуумі суперечить закону збереження енергії-імпульсу і є неможливе.

Задачі для самостійної роботи

1. Частинка масою m_0 розпадається на льоту на дві частинки масами m_1 і m_2 , що летять вперед і назад уздовж швидкості руху V . Знайти енергії частинок у лабораторії.

2. Частинка масою m_0 летить у лабораторії зі швидкістю V і розпадається на льоту на дві частинки масами m_1 і m_2 , які у власній системі відліку летять у протилежні боки перпендикулярно до напрямку швидкості. Знайти енергії частинок у лабораторній системі відліку.

3. Фотон частотою ω розсіюється на нерухомому заряді масою m під кутом розсіяння θ . Визначити частоту розсіяного фотона.

4. Два тіла масами m_1 і m_2 рухаються назустріч одне одному зі швидкостями v_1 і v_2 , кут між якими в лабораторній системі дорівнює α . Після зіткнення тіла злипаються й далі рухаються як ціле. Знайти швидкість утвореного тіла.

5. Частинка масою m_0 рухається в лабораторній системі зі швидкістю v і розпадається на дві частинки масами m_1 і m_2 , які летять вперед і назад уздовж напрямку руху. Знайти енергії частинок у лабораторній системі.

6. Визначити частоту фотона, що випромінюється нерухомим збудженим ядром масою M , якщо енергія збудження ядра дорівнює ΔW .

6. Перетворення поля

Електромагнітне поле як фізичний об'єкт чотиривимірного часу-простору являє собою тензор другого рангу. Контраваріантні компоненти тензора електромагнітного поля мають вигляд

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Нульовий рядок і нульовий стовпець дають компоненти електричного поля, а просторові компоненти – проекції магнітного поля на осі декартових координат. У різних системах відліку компоненти тензора описують електричне або магнітне поле. Із тензорного характеру поля також випливає, що поняття «електричне поле», «магнітне поле» є відносні.

У разі переходу між інерціальними системами відліку компоненти тензора поля перетворюються згідно з законом

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta}, \quad (6.2)$$

де Λ_{β}^{ν} – матриця перетворень Лоренца ($x'^{\nu} = \Lambda_{\beta}^{\nu} x^{\beta}$). Формулу (6.2) можна переписати в матричному вигляді: $F' = \Lambda F \Lambda^T$.

Приклад 6.1. Знайти електромагнітне поле, що створюється нескінченним прямолінійним струмом силою I , знаючи електричне поле нерухомої нескінченної прямолінійної зарядженої нитки.

Позначимо лабораторну систему відліку через K . Виберемо вісь x , спрямовану вздовж струму нитки. Нехай система K' рухається зі швидкістю V в напрямку струму і є супутня до зарядів струму. Оскільки в системі K' заряди нерухомі, магнітне поле відсутнє, а електричне поле відоме з електростатики, то

$$\mathbf{E}' = \left(0, \frac{2q'y'}{y'^2 + z'^2}, \frac{2q'z'}{y'^2 + z'^2}\right), \quad \mathbf{H}' = 0,$$

де q' – заряд одиниці довжини нитки. Таким чином, тензор поля набуває вигляду

$$F'^{\mu\nu} = \frac{2q'}{y'^2 + z'^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y' & -z' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & 0 & 0 \\ z' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перехід від системи K' до K описується перетвореннями Лоренца (1.1). Відповідна матриця перетворень

$$\tilde{\Lambda}_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V/c & 0 & 0 \\ \gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Згідно з законом перетворення тензора поля $F = \tilde{\Lambda} F' \tilde{\Lambda}^T$ знаходимо компоненти тензора в системі K :

$$F^{\mu\nu} = \frac{2q'\gamma}{y^2 + z^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & -yV/c & -zV/c \\ y & yV/c & 0 & 0 \\ z & zV/c & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де враховано $y' = y$, $z' = z$. За рахунок лоренцевого скорочення довжини заряд одиниці нитки в системі K дорівнює $q = \gamma q'$. Оскільки $qV = I$, одержуємо

$$\mathbf{E} = \left(0, \frac{2qy}{y^2 + z^2}, \frac{2qz}{y^2 + z^2}\right), \quad \mathbf{H} = \left(0, \frac{-2Iz}{c(y^2 + z^2)}, \frac{2Iy}{c(y^2 + z^2)}\right),$$

що збігається з відомим результатом магнітостатики.

Задачі для самостійної роботи

1. У системі відліку K присутні постійні електричне $\mathbf{E}$ і магнітне $\mathbf{H}$ поля. Знайти систему відліку K' , у якій поля паралельні.

2. Визначити поле точкового заряду q , який рухається зі швидкістю v вздовж осі OX , провівши перетворення Лоренца від системи, у якій заряд знаходиться в стані спокою, до лабораторної.

3. Довести, що величина $E^2 - H^2$ є інваріантна відносно перетворень Лоренца.

4. Заряд q рухається в площині XY вздовж прямої $y = x - l$ зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$ і віддаляється від початку координат. У початковий момент часу $t_0 = 0$ він знаходився на осі X . Знайти розподіл об'ємної густини заряду ρ і об'ємної густини струму $\mathbf{j}$ у просторі.

5. Визначити квазістаціонарне електромагнітне поле заряду q , який повільно рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$.

7. Випромінювання хвиль

На практиці в багатьох випадках рух зарядів у системі є повільний порівняно зі швидкістю світла, $v \ll c$. У такому разі

розподіл зарядів і струмів змінюється неістотно за проміжок часу $\Delta t' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}/c \ll T$, де T – характерний для системи проміжок часу, за який розподіл змінюється істотно. Зрозуміло, що останній має порядок періоду випромінювання. Оскільки ми вибрали початок координат усередині системи, то r' є величина порядку розміру системи $l \sim V^{1/3}$. Наближення, у якому розподіл зарядів і струмів вважається незалежним від $\Delta t'$, називається дипольним випромінюванням. Воно є домінуюче, і тому в більшості випадків ним можна обмежитися. Із вимоги малості $\Delta t' \sim r/c \ll T$ випливає умова $l \ll cT$. Враховуючи, що $\lambda = cT$ дорівнює довжині хвилі, запишемо умову дипольного випромінювання у вигляді

$$l \ll \lambda. \quad (7.1)$$

Вона означає, що розміри системи повинні бути набагато меншими довжини випромінюваної хвилі. Оскільки порядок $l \sim vT$, то ми повертаємося до умови $v \ll c$.

У наближенні дипольного випромінювання напруженості магнітного й електричного полів мають такий вигляд:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 r} \left(\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt'^2} \times \mathbf{n} \right), \quad (7.2)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 r} \left(\left(\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt'^2} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \right). \quad (7.3)$$

Як бачимо, випромінювання визначається другою похідною від дипольного моменту системи $d^2 \mathbf{d}/dt'^2 = \sum q_i d\mathbf{v}/dt' = \sum q_i \mathbf{a}_i$. Таким чином, заряди можуть випромінювати хвилі, якщо вони рухаються з прискоренням. Заряд, що рухається рівномірно, хвиль не випромінює. Це зрозуміло і з принципу відносності. У такому разі існує система відліку, в якій заряд знаходиться в стані спокою, а нерухомий заряд не випромінює хвиль.

Інтенсивність випромінювання визначається за формулою

$$dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} \left(\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt'^2} \times \mathbf{n} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \left(\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt'^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (7.4)$$

де θ – кут між векторами $d^2 \mathbf{d}/dt'^2$ і $\mathbf{n}$. Це є кількість енергії, яка випромінюється системою за одиницю часу в елемент тілесного кута $d\Omega$. Кутовий розподіл випромінювання визначається множителем $\sin^2 \theta$.

Підставляючи $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ і виконуючи інтегрування за змінною $d\theta$ від 0 до π , обчислюємо повне випромінювання:

$$I_d = \frac{2}{3\pi c^3} \left(\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt'^2} \right)^2. \quad (7.5)$$

Якщо маємо лише один заряд, який рухається в деякому зовнішньому полі, то $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$ і $d^2 \mathbf{d}/dt'^2 = q\mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ – прискорення заряду. Для повного випромінювання маємо

$$I_q = \frac{2}{3\pi c^3} \mathbf{a}^2. \quad (7.6)$$

Відзначимо, що замкнена система, що складається з частинок, для яких відношення заряду до маси однакове, не може випромінювати дипольно. Справді, для такої системи дипольний момент є

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}'_i = \sum_i \frac{q_i}{m_i} m_i \mathbf{r}'_i = \text{const} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i, \quad (7.7)$$

де константа дорівнює відношенню заряду до маси. У нерелятивістському наближенні $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{R} \sum_i m_i$, де $\mathbf{R}$ – радіус-вектор центру інерції системи. Центр інерції рухається рівномірно, і друга похідна $\mathbf{d}$ дорівнює нулю.

Приклад 7.1. Нерелятивістський заряд q здійснює гармонічні коливання вздовж прямої лінії з амплітудою A та циклічною частотою ω . Знайти інтенсивність та поляризацію дипольного випромінювання залежно від напрямку в просторі.

Оберемо вісь z вздовж напрямку руху заряду. Тоді закон руху заряду буде

$$\mathbf{R}(t) = A\mathbf{e}_z \cos \omega t,$$

а дипольний момент матиме вигляд

$$\mathbf{d}(t) = q\mathbf{R}(t) = qA\mathbf{e}_z \cos \omega t.$$

Друга похідна за часом від дипольного моменту

$$\mathbf{d}''(t) = -qA\omega^2 \mathbf{e}_z \cos \omega t.$$

У дипольному наближенні випромінювана електромагнітна хвиля матиме такі електричне та магнітне поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \left(\mathbf{d}''(t - r/c) \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \left(\mathbf{d}''(t - r/c) \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки, де в момент часу t спостерігається хвиля.

Обчислимо електричне поле. Застосувавши тотожності векторної алгебри, знайдемо

$$\left(\mathbf{d}'' \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{d}'' - \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{d}'' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Звідси

$$\left(\mathbf{d}''(t - r/c) \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r} = -qA\omega^2 \cos(\omega t - kr) \left[\mathbf{e}_z - \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\mathbf{e}_z \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right],$$

де через $k = \omega/c$ позначений модуль хвильового вектора.

Уведемо сферичну систему координат. Оскільки

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta,$$

одержимо

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{qA\omega^2}{c^2 r} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \cos(\omega t - kr).$$

Як видно з формули, хвиля є монохроматична, лінійно поляризована. Електричне поле лежить у площині руху заряду, що випромінює хвилі.

Густина потоку енергії, осереднена за періодом хвилі, дорівнює

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}^2} = \frac{q^2 A^2 \omega^4}{8\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta.$$

Вона має максимум у напрямку, перпендикулярному напрямку руху заряду ($\theta = \pi/2$). А в напрямку руху заряду ($\theta = 0, \pi$) випромінювання відсутнє.

Обчислимо інтенсивність випромінювання. Для цього розглянемо елемент тілесного кута $d\Omega$ в напрямку θ . Цей тілесний кут вирізає на відстані r площу $dS = r^2 d\Omega$, через яку проходить енергія $dI = \Pi dS = \Pi r^2 d\Omega$. Звідси одержимо інтенсивність випромінювання залежно від напрямку в просторі:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{q^2 A^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta.$$

Цей результат можна одержати безпосередньо з формули (7.4), якщо підставити осереднений за періодом квадрат другої похідної від дипольного моменту:

$$\overline{(\mathbf{d}'')^2} = \frac{1}{2} q^2 A^2 \omega^4.$$

Тоді повна інтенсивність випромінювання по всіх напрямках буде такою:

$$I = \frac{q^2 A^2 \omega^4}{3\pi c^3}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Через конденсатор пролетіла частинка з масою m і зарядом q . Відстань між обкладками конденсатора дорівнює l , а напруженість електричного поля $\mathbf{E}$. Кут між вектором $\mathbf{E}$ і напрямком швидкості $\mathbf{v}_0$ частинки під час влітання дорівнював α .

Знаки заряду q і $\cos \alpha$ однакові. Знайти енергію W , яку витрачає частинка на дипольне випромінювання в ході пролітання через конденсатор.

2. Найпростіша лінійна антена являє собою тонкий прямолінійний дріт довжиною l , по якому протікає струм $J = J_0 \cos \omega t$. Визначити інтенсивність I довгохвильового випромінювання антени в середньому за часом за період коливання струму.

3. Протон із масою m і зарядом q рухається перпендикулярно однорідному магнітному полю з напруженістю $\mathbf{H}$. Його кінетична енергія в початковий момент часу $t_0 = 0$ дорівнює W_0 . Знайти закон зменшення кінетичної енергії W , обумовлений дипольним випромінюванням.

4. Лінійно поляризована плоска хвиля падає на вільний електрон із масою m і зарядом q . Визначити ефективний переріз $d\sigma$ розсіяння хвилі в тілесний кут $d\Omega$ як функцію кутів розсіювання. Знайти повний переріз σ розсіювання.

5. Довести, що дипольне випромінювання під час зіткнення двох однакових частинок відсутнє.

6. Частинка із зарядом q , що рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, пружно відбивається від деякої площини. Визначити довгохвильову частину спектра випромінювання під час зіткнення.

7. Знайти час, протягом якого частинка, що рухається за орбітою, яка являє собою коло, впаде на заряджений центр унаслідок витрати енергії на електромагнітне випромінювання.

8. Релятивістський заряд q рухається вздовж кола радіуса R зі сталою швидкістю v . Визначити інтенсивність та поляризацію дипольного випромінювання залежно від напрямку в просторі.

Список рекомендованої літератури

Алексеев, А.И. Сборник задач по классической электродинамике [Текст] / А.И.Алексеев. – М.: Наука, 1977. – 320 с.

Батыгин, В.В. Сборник задач по электродинамике [Текст] / В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин. – М.: Наука, 1970. – 503 с.

Борисенко, А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления [Текст] / А.И.Борисенко, И.Е.Тарапов. – М.: Высш. шк., 1966. – 252 с.

Бредов, М.М. Классическая электродинамика [Текст] / М.М.Бредов, В.В.Румянцев, И.Н.Топтыгин. – М.: Наука, 1985. – 400 с.

Ландау, Л.Д. Теория поля [Текст] / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Тамм, И.Е. Основы теории электричества [Текст] / И.Е.Тамм. – М.: Наука, 1989. – 504 с.

Федорченко, А.М. Теоретическая физика. Классическая электродинамика [Текст] / А.М.Федорченко. – К.: Выща шк., 1988. – 382 с.

Зміст

Передмова	3
1. Перетворення Лоренца	3
2. Чотиривимірні вектори	8
3. Релятивістська кінематика	13
4. Релятивістська динаміка	18
5. Зіткнення релятивістських частинок	22
6. Перетворення поля	24
7. Випромінювання хвиль	26
Список рекомендованої літератури	32